

**ΘΕΜΑ 1**

Να βρεθούν τα υπόλοιπα  $a$  και  $b$  των διαιρέσεων

$$\frac{1234^{7865435}}{11} \quad \text{και} \quad \frac{28^{1202}}{13}$$

αντίστοιχα, και ακολούθως να λυθεί η γραμμική ισοτιμία:  $ax \equiv b \pmod{23}$

**ΘΕΜΑ 2**

Να βρεθούν, αν υπάρχουν: (α) όλες οι λύσεις, και (β) όλες οι θετικές λύσεις, της Διοφαντικής εξίσωσης:  $1485x + 1745y = 15$

**ΘΕΜΑ 3**

Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , να υπολογισθεί το άθροισμα

$$\sum_{1 \leq k \leq n \& (k,n)=1} k$$

**ΘΕΜΑ 4**

Έστω  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  μια αριθμητική συνάρτηση, και υποθέτουμε ότι :

$$\sum_{d|n} f(d) = \frac{k}{n} \quad \text{όπου } k = \text{έτος γέννησής σας}$$

Να βρεθεί η τιμή  $f(2014)$ , γνωρίζοντας ότι η πρωτογενής ανάλυση του 2014 είναι  $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ .

**ΘΕΜΑ 5**

Για κάθε θετικό διαιρέτη  $d$  του 18, να βρεθούν όλα τα στοιχεία  $[a]_{19} \in U(\mathbb{Z}_{19})$  έτσι ώστε  $ord_{19}(a) = d$ . Ακολούθως να βρεθούν όλες οι πρωταρχικές ρίζες  $\pmod{19}$ .

**ΘΕΜΑ 6**

Να λυθεί το ακόλουθο σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$\Sigma \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

**ΘΕΜΑ 7**

Έστω  $a, n, m$  ακέραιοι αριθμοί, όπου  $n, m \geq 1$  και  $(n, m) = 1$ .

1) Δείξτε ότι το σύνολο  $\{a, a+1, \dots, a+n-1\}$  είναι ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων  $\pmod{n}$ .

2) Δείξτε ότι :  $mn \mid m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} - 1$

**ΘΕΜΑ 8**

Αν  $n$  είναι ένας φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός

$$A = \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$$

είναι ακέραιος.